



## 第四讲：

---

---

# 二维重复控制与主动扰动抑制



## 基于二维模型的鲁棒重复控制

- 重复控制问题
- 重复控制研究的基本情况
- 重复控制的二维模型
- 典型的重复控制系统设计
- 今后的研究课题

# 重复控制问题

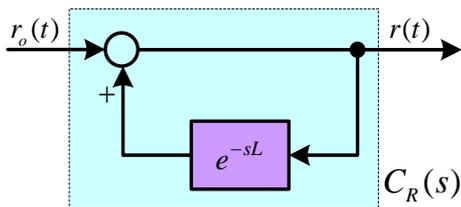
## 高精度跟踪给定周期信号和有效抑制周期扰动信号



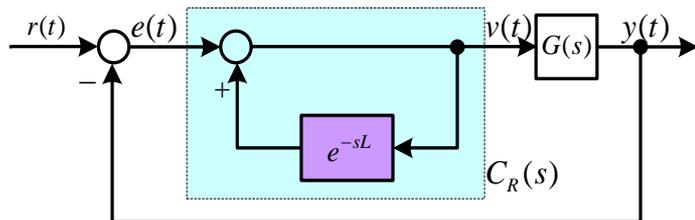
- **理论提出：**在20世纪80年代，为了实现质子加速器励磁电源中周期电流和电压的高精度控制，日本东京工业大学中野道雄研究小组提出了重复控制方法
- **工业需求：**
  - ✓ 在工业应用中，很多系统需要高精度跟踪或抑制周期性激励信号，例如同步系统和电力电子系统
  - ✓ 在实际控制系统中，往往存在诸如参数摄动、未建模动态、外部扰动和机械结构非线性等不确定因素

# 重复控制问题—基本原理

- **基本思想：** 在控制系统中引入一种学习机制，使系统能够通过自身的学习来改善跟踪精度，最终实现无稳态误差跟踪任意周期目标输入信号，其实质是在系统中嵌入一个**输入信号的内部模型**
- **基本重复控制器：** 任意周期为  $T$  的周期信号发生模型  $C_R(s) = \frac{1}{1 - e^{-sL}}$
- **基本重复控制系统：** 仅适用于相对度为0的控制对象



基本重复控制器



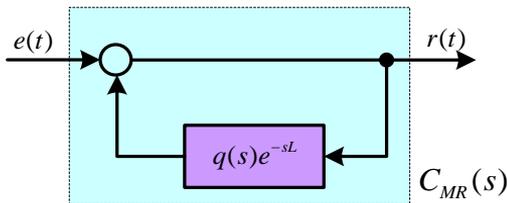
基本重复控制系统

## 重复控制问题—改进型重复控制

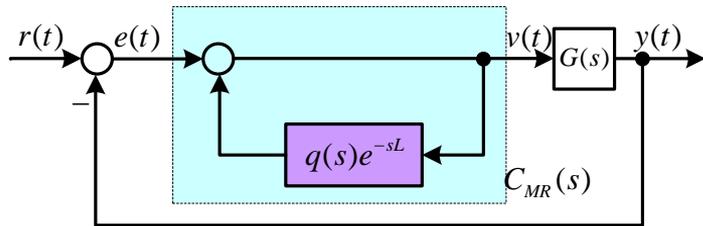
- **出发点：**解除控制对象相对度限制，拓宽重复控制的适用范围
- **改进型重复控制器：**在时滞环节之前引入了一个低通滤波器  $q(s)$

$$C_{MR}(s) = \frac{1}{1 - q(s)e^{-sL}}$$

- **改进型重复控制系统：**牺牲高频周期信号控制性能，提高系统鲁棒稳定性。低通滤波器  $q(s)$  的设计体现了稳定裕度与控制性能的折中



改进型重复控制器



改进型重复控制系统

# 重复控制研究的基本情况

## 经典的稳定性分析

- Inoue *et al* (*the 10th Annual Symposium on Incremental Motion Control, Systems and Devices*, 1981), Hara *et al* (*IEEE CDC*, 1985)给出了基本重复控制系统BIBO稳定性条件（控制对象相对度等于零）  
↓
- Hara *et al* (*IEEE TAC*, 1988), Ikeda *et al* (*IEEE CDC*, 1990)给出了改进型重复控制系统稳定性条件（只适用于最小相位系统）  
↓
- Weiss *et al* (*Automatica*, 1999)推广到MIMO系统，提出了MIMO重复控制系统稳定性条件



# 重复控制研究的基本情况

## ◆ 典型重复控制设计方法

### ➤ 控制器参数化设计

(Li *et al*, *IEEE CDC*, 1998; Chang *et al*, *Automatica*, 1995)

- 将性能指标映射到控制器的参数空间来实现重复控制器的设计
- 缺点：参数的选取需要反复试凑

### ➤ $H_\infty$ 鲁棒重复控制设计

(Bassam *et al*, *IEEE TAC*, 1992; Nagahara *et al*, *IEEE CDC*, 2009)

- 主要用于解决系统的鲁棒性和优化设计问题
- 缺点：要求对象的所有状态能够测量，只能实现状态反馈控制

# 重复控制研究的基本情况

## ◆ 典型重复控制设计方法（续）

### ➤ 基于二自由度结构设计

(Hara *et al*, *IEEE TAC*, 1988; Nakano *et al*, *CEP*, 1996)

- 同时含有前馈和反馈两个补偿器，重点是镇定控制器的设计
- 缺点：存在控制对象要求较严、参数需要反复试凑等局限性

### ➤ 插入式结构分步设计

(Doh *et al*, *IET*, 2006; Kim *et al*, *ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control*, 2004)

- 重复控制器作为误差补偿环节插入到稳定闭环系统中，其特点是分步进行镇定控制器和重复控制器的设计
- 缺点：不能有效地解决改进型重复控制系统中稳定性和稳态性能之间的折衷问题

# 重复控制研究的基本情况

## ◆ 典型重复控制设计方法（续）

### ➤ 基于反馈线性化的非线性重复控制设计

(Alleyne *et al*, *IEEE TCST*, 2000; Ghosh *et al*, *IEEE TAC*, 2000)

- 通过反馈线性化，转化为线性重复控制设计问题
- 缺点：要求控制对象可以线性化，模型精度要求高

### ➤ 基于滑模变结构的非线性重复控制设计

(Hikita *et al*, *JSME International Journal*, 1993; Cao *et al*, *American Control Conference*, 2001)

- 滑模控制补偿非线性，间接实现系统的线性化，再进行重复控制设计
- 缺点：存在抖振，限制系统收敛速度，损害机械系统



## 存在的问题

- 在改进型重复控制系统设计中，低通滤波器参数和镇定控制器参数之间相互影响，稳定性和稳态跟踪性能之间的折衷问题不能有效地解决
- 重复控制过程中存在连续控制行为和离散学习行为，目前的重复控制均是采用一维空间的方法进行研究，没有充分考虑两种行为的特点，且设计复杂
- 特别是对于不确定控制对象，还没有一种有效方法针对给定的鲁棒性能指标来设计鲁棒重复控制器
- 已有非线性重复控制系统结构和设计方法较为复杂，偏重于稳定性分析，对系统控制性能例如稳态和暂态响应，缺乏定性、定量分析

## 重复控制的二维模型 (1)

### ➤ 出发点:

考虑到重复控制过程中存在两种完全不同的行为:

- 一个周期之内的连续控制行为
- 各个周期之间的离散学习行为



基于连续/离散二维空间的重复控制方法

### ➤ 基本思想:

把一个周期内的连续控制行为和各个周期之间的离散学习行为分开来考虑，独立地考虑和设计重复控制系统的控制与学习过程

## 重复控制的二维模型 (2)

- 对于基本的重复控制系统，重复控制器  $C_R(s)$  的时域形式为

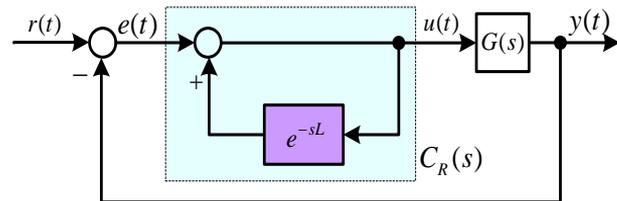
$$u(t) = \begin{cases} e(t), & 0 \leq t < L \\ u(t-L) + e(t), & t \geq L \end{cases}$$

- 假定控制对象: 
$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

- $\tau (0 \leq \tau \leq L)$  表示时间的连续变量,  $k (k = 0, 1, 2, \dots)$  表示学习次数的离散变量, 定义:

$$\xi(k, \tau) = \xi(kL + \tau) = \xi(t)$$

$$\xi(k+1, \tau) = \xi((k+1)L + \tau) = \xi(t+L)$$



## 重复控制的二维模型 (3)

- 对  $\xi(t), (t \geq L)$  , 令

$$\Delta \xi(t+L) = \xi(t+L) - \xi(t)$$

- 对周期参考信号, 有  $r(t+L) = r(t)$  , 且  $e(t) = r(t) - y(t)$

将重复控制系统映射到二维空间上, 可得

- 连续控制行为:  $\Delta \dot{x}_{k+1}(\tau) = A\Delta x_{k+1}(\tau) + B\Delta u_{k+1}(\tau)$

- 离散学习行为:  $e_{k+1}(\tau) = -C\Delta x_{k+1}(\tau) + e_k(\tau) - D\Delta u_{k+1}(\tau)$

- 即**重复控制的二维模型**:

$$\begin{bmatrix} \Delta \dot{x}_{k+1}(\tau) \\ e_{k+1}(\tau) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_{k+1}(\tau) \\ e_k(\tau) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ -D \end{bmatrix} \Delta u_{k+1}(\tau)$$

# 基于二维模型的重复控制设计

## 研究内容

- 改进型重复控制系统设计
  - 改进型鲁棒重复控制系统设计
  - 同时优化低通滤波器剪切频率和反馈控制增益
  
- 二维重复控制系统设计
  - 状态反馈
  - 状态观测器重构状态反馈
  - 静态输出反馈
  - 最优重复控制
  - $H_\infty$ 鲁棒重复控制

# 典型的重复控制系统设计

## 1. 基于低通滤波器和反馈控制器同时优化的鲁棒重复控制系统设计

(Jinhua She, Min Wu, Yonghong Lan, and Yong He. *IET Control Theory and Applications*, 2010, 4 (8): 1366-1376)

## 2. 基于状态观测器的 $H_\infty$ 鲁棒重复控制系统设计

(Min Wu, Lan Zhou, and Jinhua She. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2011, 56 (6): 1452~1457)

## 3. 基于连续/离散二维模型的改进型重复控制系统设计

(Jinhua She, Lan Zhou, Min Wu, and Jie Zhang. *Automatica*, 2012, 48 (5): 844-850)

## 4. 鲁棒改进型重复控制系统设计

(Lan Zhou, Jinhua She, Min Wu, and Jie Zhang. *ASME. Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 2012, 134 (4): 011023-1 -7)

(Min Wu, Bao-Gang Xu, Wei-Hua Cao, Jin-Hua She. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2014, 22(3): 1044-1051)

# 实例1—基于一维方法

## 设计问题:

对于给定的改进型重复控制系统，在系统鲁棒稳定的前提下，寻找低通滤波器的最大剪切频率  $\omega_c$ ，使系统具有最高的稳态跟踪精度

控制对象:

$$\begin{cases} \dot{x}_p(t) = A_p x_p(t) + B_p u(t) \\ y(t) = C_p x_p(t) \end{cases}$$

不确定性:

$$A_p = A_{p0} + \Delta A_p(t), B_p = B_{p0} + \Delta B_p(t)$$

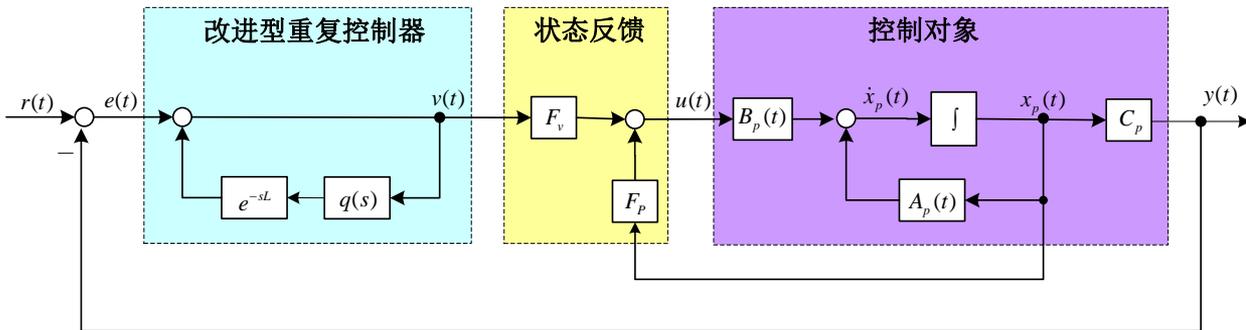
$$\begin{bmatrix} \Delta A_p(t) & \Delta B_p(t) \end{bmatrix} = \Phi_p \Gamma(t) \begin{bmatrix} \Psi_A & \Psi_B \end{bmatrix}$$

$$\Gamma^T(t) \Gamma(t) \leq I, \forall t \geq 0$$

## 系统结构设计:

引入状态反馈控制增益  $K_e, K_p$ ，提高系统鲁棒稳定性，改善系统暂态性能

# 实例1—基于一维方法



低通滤波器: 
$$q(s) = \frac{\omega_c}{s + \omega_c}$$

重复控制器: 
$$\dot{v}(t) = -\omega_c v(t) + \omega_c v(t - L) + \omega_c e(t) + \dot{e}(t)$$

滤波器剪切频率: 
$$\omega_c = \hat{\omega}_c + \Delta\omega_c, \Delta\omega_c = 1/\gamma$$

状态反馈控制器: 
$$u(t) = Fx_s(t) = \begin{bmatrix} F_p & F_v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_p^T(t) & v(t) \end{bmatrix}^T$$

## 实例1—基于一维方法

### 鲁棒稳定性定理1:

给定状态反馈控制增益  $F$ ，如果存在对称正定矩阵  $P, Q_0, Q_1$ ，以及常数  $\lambda > 0$ ，使得如下两个LMI成立，则剪切频率为  $\omega_c$  时系统鲁棒稳定

$$Q_1 < \gamma Q_0 \quad (a)$$

$$\begin{bmatrix} PA_{cl0} + A_{cl0}^T P + Q_0 + \lambda \Psi^T \Psi & PA_{cl0} & P\Phi \\ * & -Q_0 & 0 \\ * & * & -\lambda I \end{bmatrix} < -\gamma \begin{bmatrix} PA_{cl1} + A_{cl1}^T P - Q_1 & PA_{cl1} & 0 \\ * & Q_1 & 0 \\ * & * & 0 \end{bmatrix} \quad (b)$$

**最大剪切频率  $\omega_{cm}$  设计问题:** 对于给定的  $F$  和剪切频率  $\hat{\omega}_c$ ，求解如下广义特征值最小化问题，从而获得最大剪切频率： $\omega_{cm} = \hat{\omega}_c + 1/\gamma$

$$\min \gamma > 0 \text{ s.t. LMIs (a),(b)}$$

## 实例1—基于一维方法

### 鲁棒稳定性定理2:

对于给定的  $\omega_c$ ，如果存在对称正定矩阵  $X$  和适合维数的矩阵  $W$ ，使得如下LMI成立

$$\begin{bmatrix} \Theta_{11} & B_{g1} & \Theta_{13} \\ * & -I & 0 \\ * & * & -I \end{bmatrix} < 0$$

其中

$$\Theta_{11} := A_g X + B_{g2} W + (A_g X + B_{g2} W)^T$$

$$\Theta_{13} := (C_{g1} X + D_{g12} W)^T$$

则系统鲁棒稳定，对应的状态反馈控制增益为： $F = WX^{-1}$

## 实例1—数值仿真

同时优化剪切频率和状态反馈控制增益的迭代算法：  
 （流程图见论文Page 7, Fig 7 Flowchart of algorithm, 略）

数值仿真：

控制对象参数：

$$\begin{cases} A_{p0} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}, B_{p0} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, C_p = [1 \quad 0] \\ \Phi_p = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0.1 \end{bmatrix}, \Gamma(t) = \begin{bmatrix} \sin 0.1\pi t & 0 \\ 0 & \cos 0.1\pi t \end{bmatrix} \\ \Psi_A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix}, \Psi_B = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0 \end{bmatrix} \end{cases}$$

参考输入信号：
$$r(t) = \sin \frac{2\pi}{5} t + \frac{1}{2} \sin \frac{4\pi}{5} \pi t + \frac{1}{2} \sin \frac{6\pi}{5} t$$

## 实例1—数值仿真

应用上述迭代算法，求得控制器参数：

$$\omega_{\text{cm}} = 144.655 \text{ rad/s}, F = [-34.58 \quad -126.109 \quad 296.511]$$

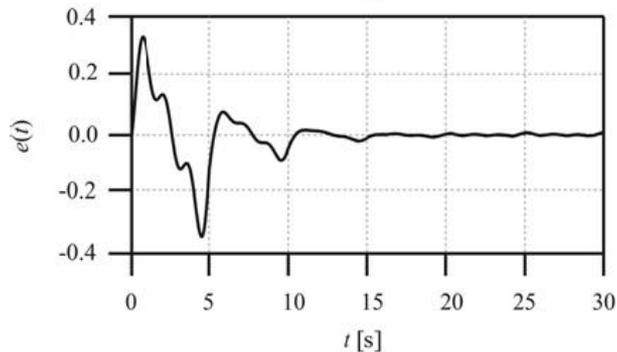
应用Doh等学者提出的算法（参考：Doh, *et al*, *IEE Proc., Control Theory Appl.*, 2006），求得控制器参数：

$$\omega_{\text{cm}} = 13.399 \text{ rad/s}, F = [-3.887 \quad -19.73 \quad 65.1]$$

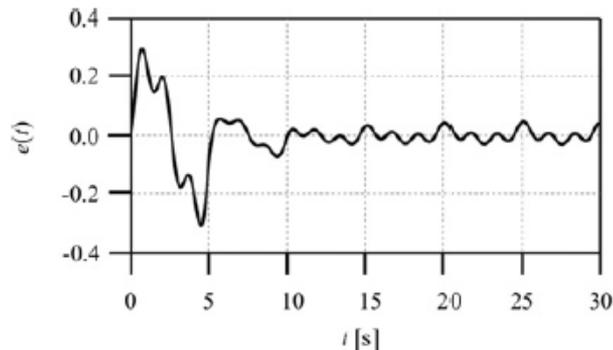
对比  $\omega_{\text{cm}}$  可知，本文算法可以求得更大的滤波器剪切频率，从而在保证系统鲁棒稳定的同时获得更好的稳态控制性能

## 实例1—数值仿真结果

- 图(a): 控制系统鲁棒稳定, 稳态峰-峰值相对跟踪误差为**0.2%**
- 图(b): 控制系统鲁棒稳定, 稳态峰-峰值相对跟踪误差为**18.1%**
- 对比Doh *et al*的方法, 我们的方法使系统具有更高的稳态误差精度



(a) 我们的方法



(b) Doh *et al*方法

## 实例1—结论

---

---

- 针对一类不确定性系统，提出了一种同时优化滤波器最大剪切频率和状态反馈控制器参数的迭代算法，保证了改进型重复控制系统的鲁棒稳定性和稳态跟踪精度
- 相比已有算法，该迭代算法能够求得更大的剪切频率，并且具有耗时短，效率高的优点，为求解改进型重复控制系统中鲁棒稳定性和稳态跟踪性能的折中提供了一种系统方法
- 所提出的方法不能对系统的控制性能和学习性能进行独立调节，不便于进一步提升系统整体性能

## 实例2—基于二维模型设计方法

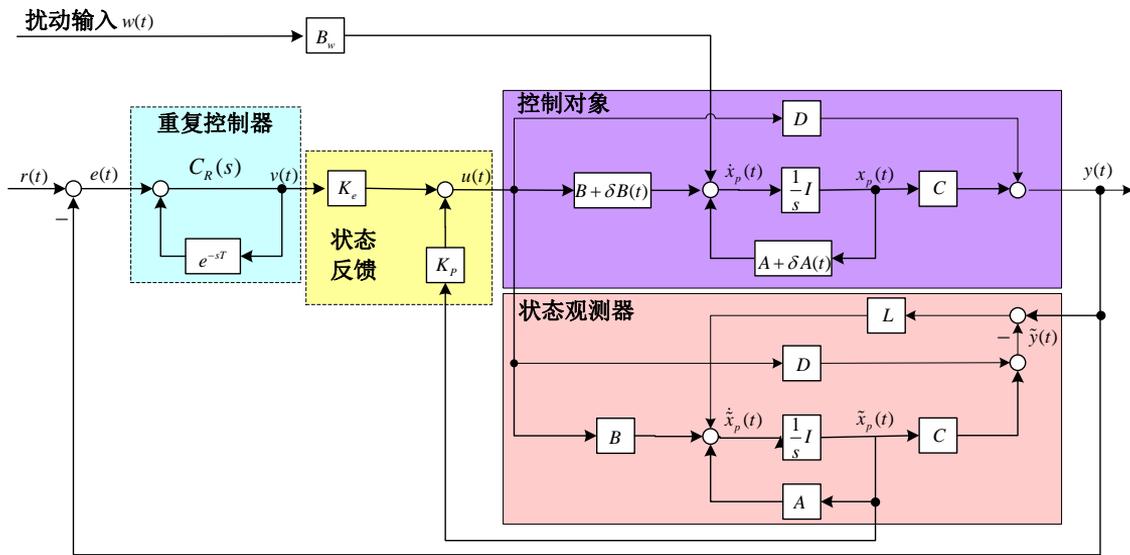
$$\text{控制对象: } \begin{cases} \dot{x}_p(t) = [A + \delta A(t)]x_p(t) + [B + \delta B(t)]u(t) + B_w w(t) \\ y_p(t) = Cx_p(t) + Du(t) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{时变周期} \quad & \delta A(T+t) = \delta A(t), \delta B(T+t) = \delta B(t), \forall t > 0 \\ \text{不确定性} \quad & \Delta w(t) = w(t) - w(t-T) \neq 0, w(t) \in L_2 \\ \text{及扰动:} \quad & \begin{bmatrix} \delta A(t) & \delta B(t) \end{bmatrix} = ME(t) \begin{bmatrix} N_0 & N_1 \end{bmatrix} \\ & E^T(t)E(t) \leq I, \forall t > 0 \end{aligned}$$

### 系统结构设计:

- 控制对象包含直达项, 即  $D \neq 0$ , 因此采用基本重复控制器
- 引入状态反馈改善系统稳定性和系统暂态性能
- 引入状态观测器, 由估计状态代替对象状态实现状态反馈, 拓宽应用范围

# 实例2—基于二维模型设计方法



## 设计问题:

设计  $K_e, K_p, L$ , 使得重复控制系统内部稳定, 并且满足扰动抑制性能条件:

$$\|G_{ew}\|_\infty := \sup_{0 \neq \Delta w(t) \in L_2} \frac{\|e(t)\|_2}{\|\Delta w(t)\|_2} < \gamma$$



## 实例2—基于二维模型设计方法

状态观测器:

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}}_p(t) = A\tilde{x}_p(t) + Bu(t) + L[y_p(t) - \tilde{y}_p(t)] \\ \tilde{y}_p(t) = C\tilde{x}_p(t) + Du(t) \end{cases}$$

状态估计误差方程:

$$x_\delta(t) = x_p(t) - \tilde{x}_p(t)$$

$$\dot{x}_\delta(t) = [A + \delta A(t) - LC]x_\delta(t) + \delta A(t)\tilde{x}_p(t)$$

重复控制器输出:

$$v(t) = e(t) + v(t-T)$$

系统控制律:

$$u(t) = K_e v(t) + K_p \tilde{x}_p(t)$$

## 实例2—基于二维模型设计方法

连续/离散二维系统:

$$\begin{aligned}
 x^T(k+1, \tau) &= [\tilde{x}_p^T(k+1, \tau), x_\delta^T(k+1, \tau)]^T \\
 \begin{cases} \Delta \dot{x}(k+1, \tau) = \hat{A}\Delta x(k+1, \tau) + \hat{B}\Delta u(k+1, \tau) + \hat{B}_w\Delta w(k+1, \tau) \\ e(k+1, \tau) = e(k, \tau) + \hat{C}\Delta x(k+1, \tau) - D\Delta u(k+1, \tau) \end{cases}
 \end{aligned}$$

二维控制律:

$$\begin{aligned}
 \Delta u(k+1, \tau) &= [\bar{F} \quad F_e] \begin{bmatrix} \Delta x(k+1, \tau) \\ e(k, \tau) \end{bmatrix} \\
 \bar{F} &= [F_p, \quad -F_e C], \quad F_p = \frac{K_p - K_e C}{1 + K_e D}, \quad F_e = \frac{K_e}{1 + K_e D}
 \end{aligned}$$

$\bar{F}$  调节控制,  $F_e$  调节学习。



## 实例2—基于二维模型设计方法

### 稳定性定理和控制器设计算法:

给定正数  $\gamma > 0, \alpha > 0, \beta > 0$  , 如果存在对称、正定矩阵  $X_1, X_{11}, X_{22}, X_3$  以及任意矩阵  $W_1, W_2, W_3, W_4$  , 使得 **LMI**

$$\begin{bmatrix} \Phi_{11} & \Phi_{12} & \beta BW_4 & 0 & 0 & \Phi_{16} & \Phi_{17} & \Phi_{18} \\ * & \Phi_{22} & 0 & B_w & M & \Phi_{26} & \Phi_{27} & \Phi_{28} \\ * & * & -\beta X_3 & 0 & 0 & \Phi_{36} & \Phi_{37} & \Phi_{38} \\ * & * & * & -\gamma^2 I & 0 & 0 & 0 & N_2^T \\ * & * & * & * & -I & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & -\beta X_3 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & -I & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & -I \end{bmatrix} < 0$$

成立, 其中

$$X_2 = V \begin{bmatrix} X_{11} & 0 \\ 0 & X_{22} \end{bmatrix} V^T$$

## 实例2—基于二维模型设计方法

$$\begin{aligned} \Phi_{11} &= \alpha A^T X_1 + \alpha X_1 A + \alpha B W_1 + \alpha W_1^T B^T, & \Phi_{12} &= W_2 C - B W_3 C \\ \Phi_{16} &= \Phi_{17} = -\alpha X_1 C^T - \alpha W_1^T D^T, & \Phi_{18} &= \alpha X_1 N_0^T + \alpha W_1^T N_1^T \\ \Phi_{22} &= X_2 A^T - C^T W_2^T + A X_2 - W_2 C, & \Phi_{26} &= \Phi_{27} = -X_2 C^T + C^T W_3^T D^T \\ \Phi_{28} &= X_2 N_0^T - C^T W_3^T N_1^T, & \Phi_{36} &= \Phi_{37} = \beta X_3 - \beta W_4^T D^T \\ \Phi_{38} &= \beta W_4^T N_1^T \end{aligned}$$

则重复控制闭环系统鲁棒稳定，且具有 $H_\infty$ 扰动抑制性能水平 $\gamma$ ，同时反馈控制增益和状态观测器增益分别为

$$\begin{aligned} \bar{F} &= \begin{bmatrix} W_1 X_1^{-1} & -W_4 X_3^{-1} C \end{bmatrix} \\ F_e &= W_4 X_3^{-1} = W_3 \bar{X}_2^{-1} \\ L &= W_2 \bar{X}_2^{-1} = W_2 U S X_{11}^{-1} S^{-1} U^T \end{aligned}$$

稳定性条件中的可调参数 $\alpha, \beta$ ，实现对控制和学习的分别调节。



## 实例2—数值仿真

控制对象:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 4 & -5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad B_w = \begin{bmatrix} 0 \\ 1.4 \end{bmatrix}, \quad C = [5 \quad 0], \quad D = 1$$

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad N_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix}, \quad N_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$

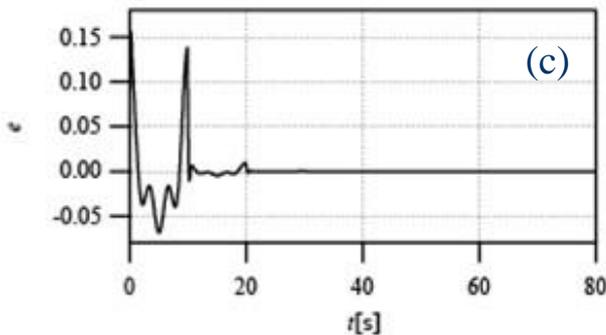
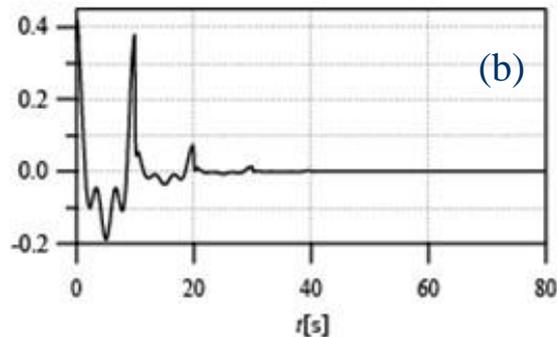
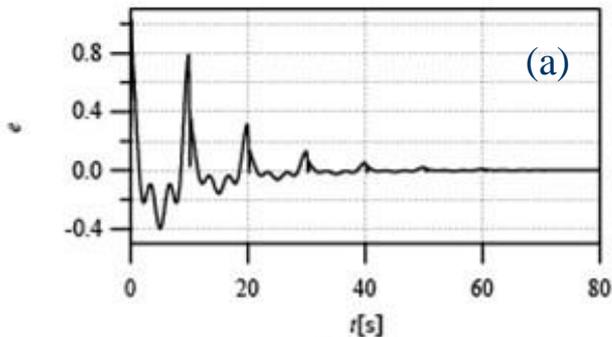
$$F(t) = \begin{bmatrix} \sin(0.2\pi t) & 0 \\ 0 & \sin(0.2\pi t) \end{bmatrix}, \quad \gamma = 0.4$$

参考输入:  $r(t) = \cos \frac{2\pi}{10}t + 0.5 \cos \frac{4\pi}{10}t + 0.5 \cos \frac{6\pi}{10}t$

扰动信号: 
$$w(t) = \begin{cases} 0, & t < 30 \\ 0.1 \cos \frac{2\pi}{16}t + 0.05 \sin \frac{4\pi}{16}t + 0.05 \sin \frac{6\pi}{16}t, & 30 \leq t \leq 80 \\ 0, & t > 80 \end{cases}$$

## 实例2—数值仿真结果 (1)

无扰动输入时，系统跟踪误差



(a):  $\alpha = 0.001, \beta = 1;$

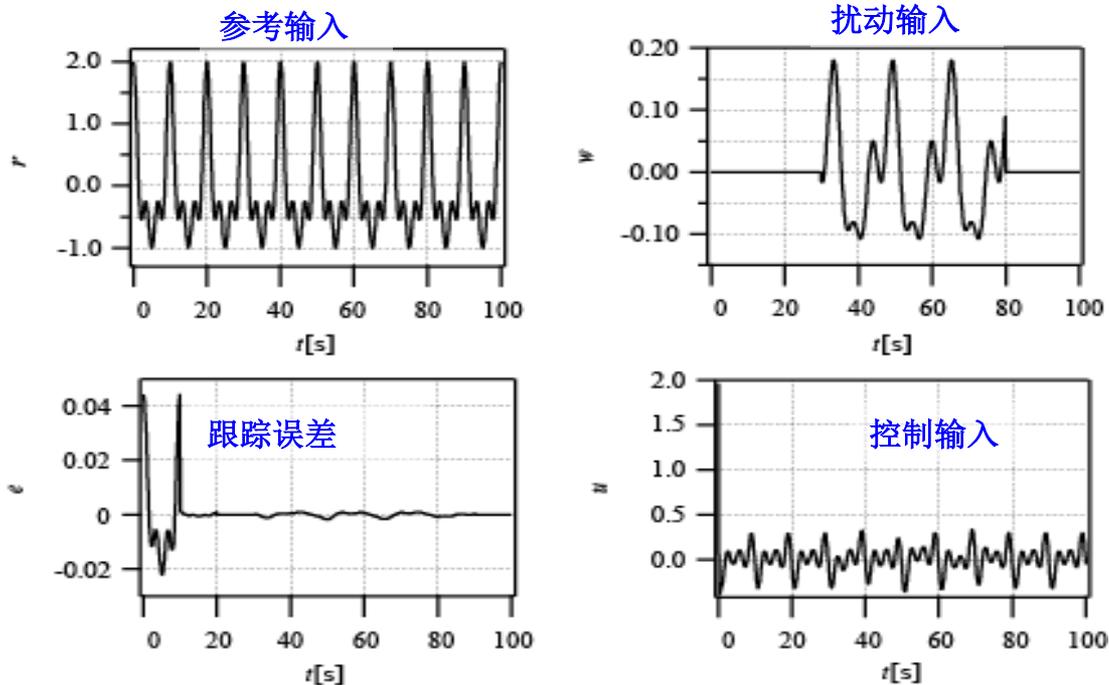
(b):  $\alpha = 1, \beta = 1;$

(c):  $\alpha = 1, \beta = 0.0001.$

性能指标:  $J_{10} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{10} \int_{(k-1)T}^{kT} e^2(t) dt$

## 实例2—数值仿真结果 (2)

扰动抑制仿真结果（基于性能指标  $J_{10}$ ，取定参数： $\alpha = 55, \beta = 10^{-6}$ ）



## 实例2—结论

---

---

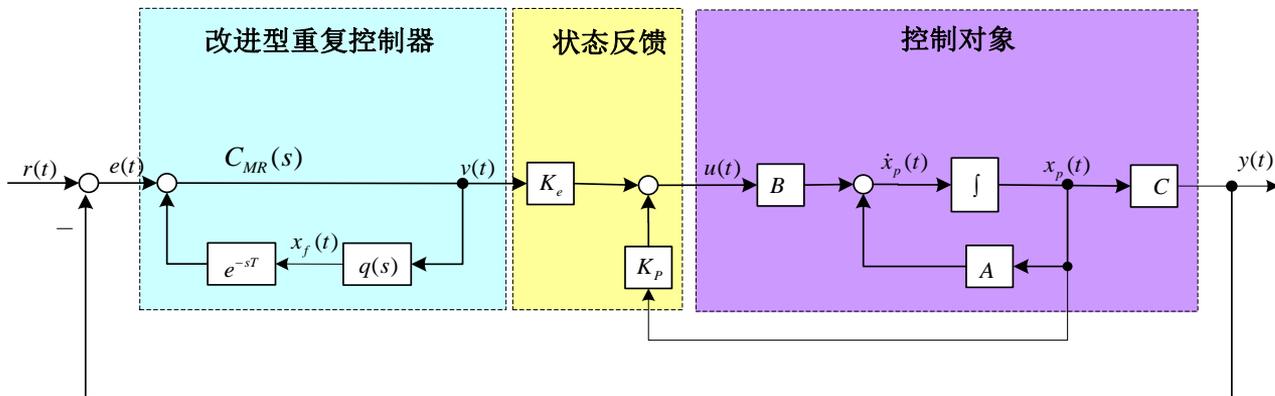
- 针对一类基于状态观测器的重复控制系统，建立了系统的二维模型，提出了一种 $H_\infty$ 鲁棒重复控制系统设计方法，保证了系统鲁棒稳定，并且具有给定扰动抑制性能
- 根据重复控制系统的二维特性，建立了其二维模型，实现了控制和学习行为的分别描述；基于二维模型，将系统设计转化为二维系统的 $H_\infty$ 鲁棒镇定问题；根据二维控制律，得到了可以独立调节控制和学习行为的控制器参数  $\bar{F}$ ,  $F_e$
- 基于稳定性条件，通过改变可调参数  $\alpha$ ,  $\beta$ ，实现了控制和学习性能的分别调节，最终获得了满意的跟踪性能

## 实例3—基于二维模型设计方法

控制对象: 
$$\begin{cases} \dot{x}_p(t) = Ax_p(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx_p(t), \end{cases}$$

系统结构设计:

- 控制对象的相对度不为0，因此采用改进型重复控制器
- 引入状态反馈改善系统稳定性和暂态性能



## 实例3—基于二维模型设计方法

### 设计问题:

寻找低通滤波器剪切频率  $\omega_c$ ，以及反馈控制增益  $K_e, K_p$ ，使得系统稳定，同时具有满意的稳态跟踪性能和暂态性能

低通滤波器:  $q(s) = \frac{\omega_c}{s + \omega_c}$

改进型重复控制器状态方程:

$$\begin{cases} \dot{x}_f(t) = -\omega_c x_f(t) + \omega_c x_f(t-T) + \omega_c e(t) \\ v(t) = e(t) + x_f(t-T) \end{cases}$$



低通滤波器将控制和学习混淆在一起

系统控制律:  $u(t) = K_e v(t) + K_p x_p(t)$



## 实例3—基于二维模型设计方法

连续/离散二维模型:

$$\begin{cases} \dot{x}(k, \tau) = \bar{A}x(k, \tau) + \bar{A}_d x(k-1, \tau) + \bar{B}u(k, \tau) \\ e(k, \tau) = \bar{C}x(k, \tau) \\ u(k, \tau) = [F_p \quad 0]x(k, \tau) + [0 \quad F_e]x(k-1, \tau) \end{cases}$$

调节控制

调节学习

其中

$$\begin{cases} x^T(k, \tau) = [x_p^T(k, \tau), \quad x_f^T(k, \tau)] \\ \bar{A} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -\omega_c C & -\omega_c \end{bmatrix}, \bar{A}_d = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \omega_c \end{bmatrix} \\ \bar{B}^T = [B^T \quad 0], \bar{C} = -[C \quad 0] \end{cases}$$

$$F_p = -K_e C + K_p, F_e = K_e$$

## 实例3—基于二维模型设计方法

### (1) 最大剪切频率设计算法

给定低通滤波器剪切频率初始值  $\hat{\omega}_c$  , 以及二维反馈增益  $F_p$  ,  $F_e$  , 运用标准广义奇异值优化问题 (SGEOP) 计算出最大剪切频率, 即

$$\min \gamma > 0 \text{ s.t. } Q_1 < \gamma Q_0 \text{ and } \Xi_1 < -\gamma \Xi_0$$

$$\Xi_0 = \begin{bmatrix} P\bar{A}_{l0} + \bar{A}_{l0}^T P + Q_0 & P\bar{A}_{dl0} \\ * & -Q_0 \end{bmatrix}$$

$$\Xi_1 = \begin{bmatrix} P\bar{A}_{l1} + \bar{A}_{l1}^T P - Q_1 & P\bar{A}_{dl1} \\ * & -Q_1 \end{bmatrix}$$

低通滤波器剪切频率为

$$\delta\omega_c = 1/\gamma$$

$$\omega_c = \hat{\omega}_c + \delta\omega_c$$

## 实例3—基于二维模型设计方法

### (2) 镇定控制器设计算法-LMI稳定性条件

给定低通滤波器的剪切频率  $\omega_c$ ，两正数  $\alpha, \beta$ ，如果存在正定对称矩阵  $X_1, X_2, Y_1, Y_2$  以及任意矩阵  $W_1, W_2$ ，使得LMI

$$\begin{bmatrix} \Theta_{11} & -\alpha\omega_c X_1 C^T & 0 & \beta B W_2 & \alpha X_1 & 0 \\ * & -2\omega_c X_2 & 0 & \beta\omega_c Y_2 & 0 & X_2 \\ * & * & -Y_1 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & -\beta Y_2 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -Y_1 & 0 \\ * & * & * & * & * & -\beta Y_2 \end{bmatrix} < 0$$

成立，其中  $\Theta_{11} = \alpha X_1 A^T + \alpha A X_1 + \alpha W_1^T B^T + \alpha B W_1$

则改进型闭环系统渐近稳定。并且，反馈控制增益为  $F_p = W_1 X_1^{-1}, F_e = W_2 Y_2^{-1}$

## 实例3—实验系统仿真

(3) 同时优化剪切频率和反馈控制增益的迭代算法  
 (流程图见论文Page 6, Fig.3 Flowchart of algorithm, 略)

(4) 实验系统仿真

控制对象为包含两个电机的旋转系统:

$$\left\{ \begin{array}{l} A = \begin{bmatrix} -31.31 & 0 & -2.833 \times 10^4 \\ 0 & -10.25 & 8001 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \\ B = \begin{bmatrix} 28.06 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C = [1 \quad 0 \quad 0]. \end{array} \right.$$

参考输入信号:  $r(t) = \sin \pi t + 0.5 \sin 2\pi t + 0.5 \sin 3\pi t$

## 实例3—实验系统仿真

设定初值和性能指标函数为：

$$\varepsilon = 10^{-3}, h = 0.1, \hat{\omega}_c = 20 \text{ rad/s}, J_{10} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{10} \int_{(k-1)T}^{kT} e^2(t) dt$$

四组参数及对应的性能指标和最大剪切频率(说明参数的调节作用)：

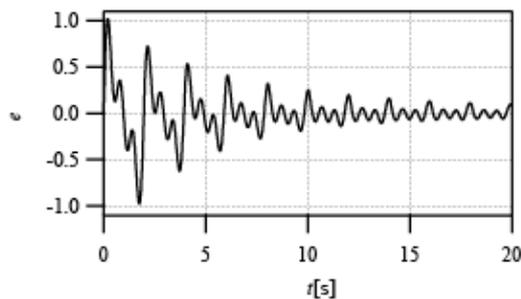
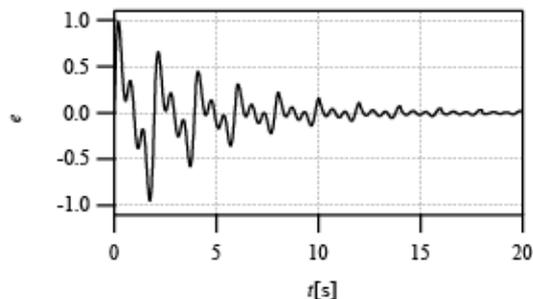
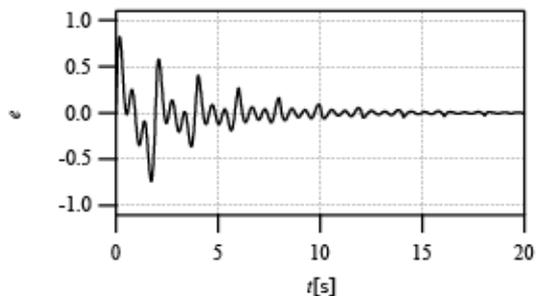
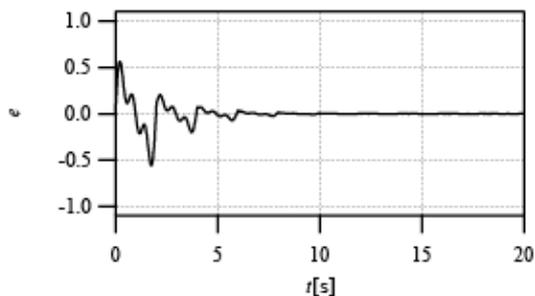
$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(a): } \alpha = 0.1, \beta = 0.2 \\ \text{(b): } \alpha = 0.1, \beta = 0.5 \\ \text{(c): } \alpha = 1, \beta = 1 \\ \text{(d): } \alpha = 1.8, \beta = 1 \end{array} \right.$$



$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(a): } J_{10}^a = 0.5209, \omega_{cm}^a = 99.8364 \text{ rad/s} \\ \text{(b): } J_{10}^b = 0.4363, \omega_{cm}^b = 718.2389 \text{ rad/s} \\ \text{(c): } J_{10}^c = 0.2438, \omega_{cm}^c = 868.6327 \text{ rad/s} \\ \text{(d): } J_{10}^d = 0.1068, \omega_{cm}^d = 837.2533 \text{ rad/s} \end{array} \right.$$

## 实例3—实验系统仿真结果

- (b)组参数下的跟踪误差收敛速度比(a)组快，而两系统几乎同时进入稳态，因而调节 $\beta$ 主要影响学习性能；
- (c)和(d)组参数比较，在一个周期内的跟踪速度前者较后者慢，因此调节 $\alpha$ 主要影响系统控制性能

(a):  $\alpha = 0.1, \beta = 0.2$ (b):  $\alpha = 0.1, \beta = 0.5$ (c):  $\alpha = 1, \beta = 1$ (d):  $\alpha = 1.8, \beta = 1$



## 实例3—实验系统仿真

基于性能评价指标，最终选取参数

$$\alpha = 1.8, \beta = 1.2$$

对应的反馈控制增益和最大剪切频率分别为

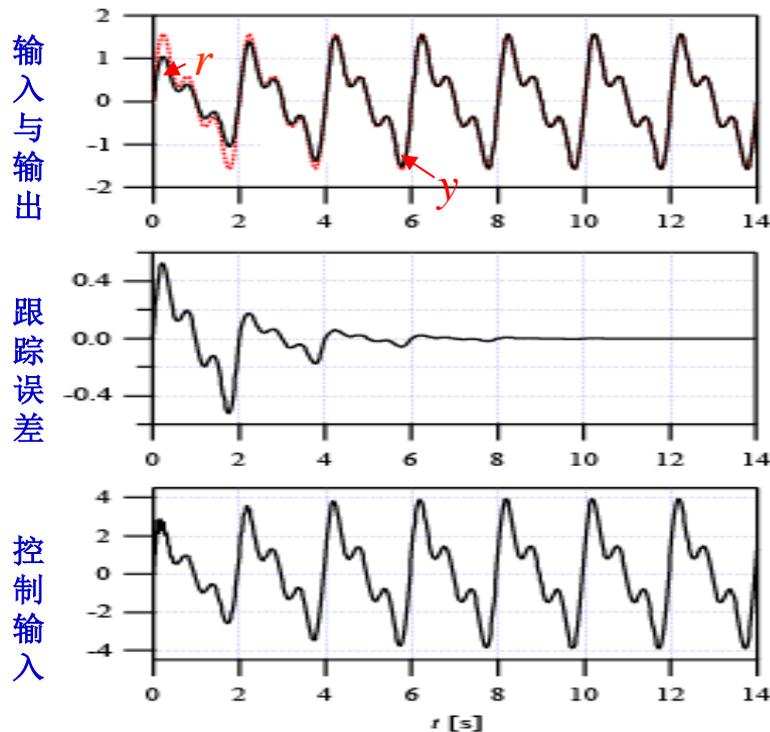
$$K_e = 21.4443, K_p = [-9.6 \quad 0 \quad 1009.5]$$

$$\omega_{cm} = 540.5651 \text{ rad/s}$$

此时，性能指标函数值

$$J_{10} = 0.0936$$

## 实例3—实验系统仿真结果



## 实例3—结论

---

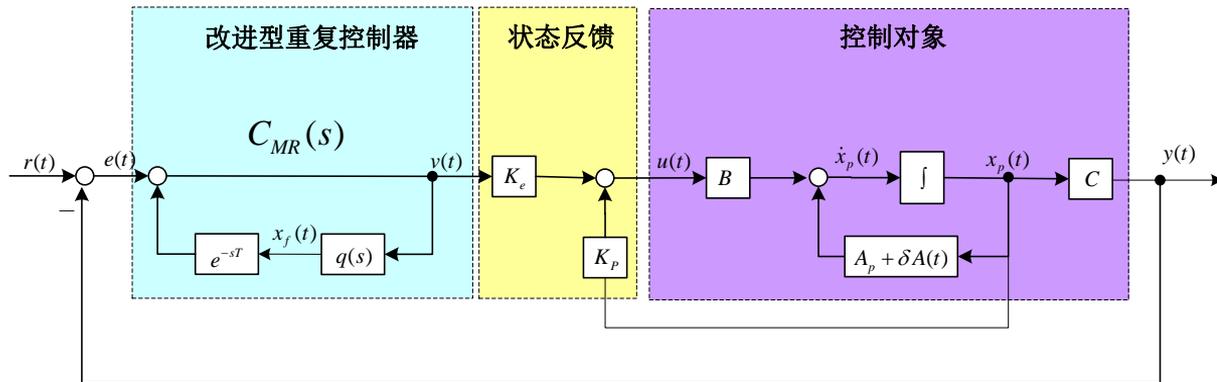
---

- 针对改进型重复控制系统，建立了准确描述改进型重复控制系统结构特性的二维模型，获得了能够分别调节控制和学习的二维控制律
- 根据系统稳定性条件，提出了同时优化低通滤波器剪切频率和反馈控制增益的迭代算法，有效解决了稳定性和稳态跟踪性能之间的折衷问题
- 区别于基于一维设计方法的重复控制系统，本文基于二维模型的设计方法，能够通过调节系统稳定性条件中的两个可调参数 $\alpha$ 和 $\beta$ ，实现控制性能和学习性能的分别调节

# 实例4—基于二维模型设计方法

控制对象: 
$$\begin{cases} \dot{x}_p(t) = [A_p + \delta A(t)]x_p(t) + B_p u(t) \\ y(t) = C_p x_p(t) \end{cases}$$

时变周期不确定性: 
$$\begin{aligned} \delta A(t+T) &= \delta A(t), \delta A(t) = MF(t)N_0 \\ F^T(t)F(t) &\leq I, \forall t \geq 0 \end{aligned}$$



## 实例4—基于二维模型设计方法

设计问题:

给定低通滤波器剪切频率  $\omega_c$ ，寻找合适的控制增益  $K_e, K_p$ ，使得闭环系统鲁棒稳定

低通滤波器:  $q(s) = \frac{\omega_c}{s + \omega_c}$

改进型重复控制器状态方程: 
$$\begin{cases} \dot{x}_f(t) = -\omega_c x_f(t) + \omega_c x_f(t-T) + \omega_c e(t) \\ v(t) = e(t) + x_f(t-T) \end{cases}$$

低通滤波器将控制和学习混淆在一起

系统控制律:  $u(t) = K_e v(t) + K_p x_p(t)$

## 实例4—基于二维模型设计方法

连续/离散二维系统:

$$\dot{x}(k, \tau) = Ax(k, \tau) + \tilde{A}x(k-1, \tau) + Bu(k, \tau)$$

$$e(k, \tau) = [-C_p \quad 0]x(k, \tau)$$

$$u(k, \tau) = [F_p \quad 0]x(k, \tau) + [0 \quad F_e]x(k-1, \tau)$$

$$x(k, 0) = x(k-1, T)$$

调节控制

调节学习

$$A = \begin{bmatrix} A_p + \delta A(k, \tau) & 0 \\ -\omega_c C_p & -\omega_c \end{bmatrix}, \quad \tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \omega_c \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_p \\ 0 \end{bmatrix}$$

# 实例4—基于二维模型设计方法

## 鲁棒稳定性定理

给定低通滤波器剪切频率  $\omega_c$ ，和两正数  $\alpha, \beta$ ，如果存在对称、正定矩阵  $X_1, X_2, Y_1, Y_2$  以及任意矩阵  $W_1, W_2$ ，使得如下 LMI

$$\begin{bmatrix} \Theta_{11} & \Theta_{12} & 0 & \Theta_{14} & \varepsilon M & \Theta_{16} & \alpha X_1 & 0 \\ * & \Theta_{22} & 0 & \Theta_{24} & 0 & 0 & 0 & X_2 \\ * & * & -Y_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & -\beta Y_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -\varepsilon I & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & -\varepsilon I & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & -Y_1 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & -\beta Y_2 \end{bmatrix} < 0$$

## 实例4—基于二维模型设计方法

### 鲁棒稳定性定理（续）

成立，其中

$$\Theta_{11} = \alpha A_p X_1 + \alpha X_1 A_p^T + \alpha B_p W_1 + \alpha W_1^T B_p^T,$$

$$\Theta_{12} = -\omega_c \alpha X_1 C_p^T, \quad \Theta_{14} = \beta B_p W_2, \quad \Theta_{16} = \alpha X_1 N_0^T,$$

$$\Theta_{22} = -2\omega_c X_2, \quad \Theta_{24} = \omega_c \beta Y_2$$

则重复控制闭环系统鲁棒稳定，并且二维反馈控制增益为

$$F_p = W_1 X_1^{-1}, \quad F_e = W_2 Y_2^{-1}$$

稳定性条件中包含两个可调参数  $\alpha, \beta$ ，用于分别优先调节重复控制 过程中的控制和学习

## 实例4—数值仿真

控制行为和学习行为的调节：

控制对象（具有周期变化硬度系数的车床卡盘工件系统）：

$$\begin{cases} A_p = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, B_p = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, C_p = [1 \quad 1] \\ M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, N_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0.1 & 0 \end{bmatrix}, F(t) = \begin{bmatrix} \sin \pi t & 0 \\ 0 & \sin \pi t \end{bmatrix} \end{cases}$$

设剪切频率为： $\omega_c = 100 \text{ rad/s}$

参考输入信号： $r(t) = \sin \pi t + 0.5 \sin 2\pi t + 0.5 \sin 3\pi t$

## 实例4—数值仿真

为了评价系统控制性能，建立可调参数  $\alpha, \beta$  ，以及性能指标值

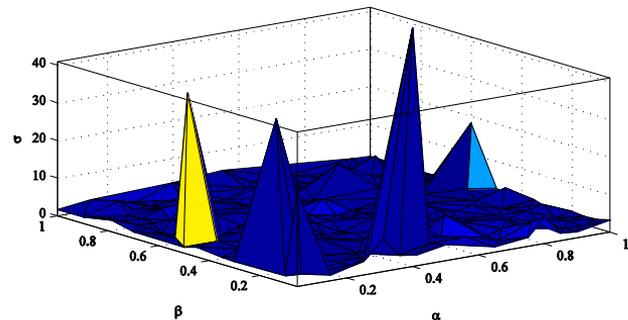
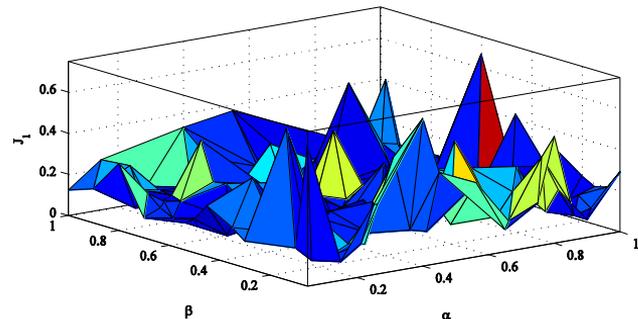
$$J_1 = \frac{1}{2} \int_0^T e^2(t) dt$$

的数量关系图

为了准确评价学习行为，建立可调参数  $\alpha, \beta$  ，以及跟踪误差包络线

$$e(t) = e_0 + \lambda \exp\left(-\frac{t}{\sigma}\right)$$

的衰减系数关系图。参数值  $1/\sigma$  表示跟踪误差的衰减速度，作为评判系统学习效率的标准

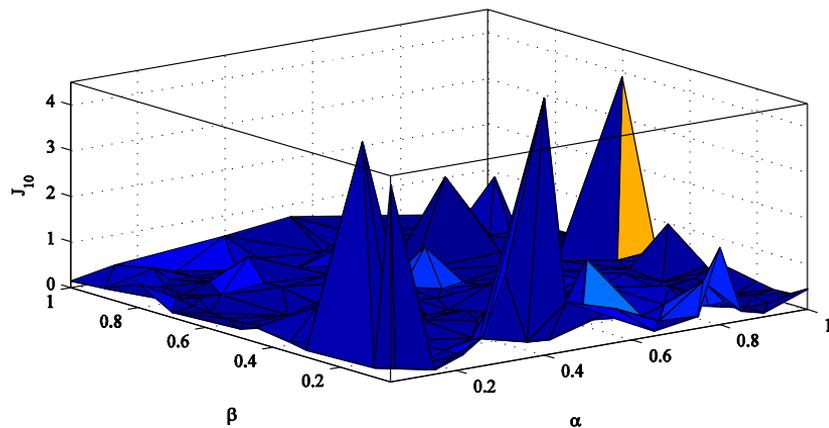


## 实例4—数值仿真

选取总体跟踪性能评价指标参数为

$$J_{10} = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^9 \int_{kT}^{(k+1)T} e^2(t) dt$$

可调参数  $\alpha$ ,  $\beta$  与  $J_{10}$  之间的数量关系如下图





## 实例4—数值仿真

控制性能指标和学习性能指标都取值较小的可调参数取值范围为：

$$\alpha \in [0.20, 0.60], \beta \in [0.35, 0.50]$$

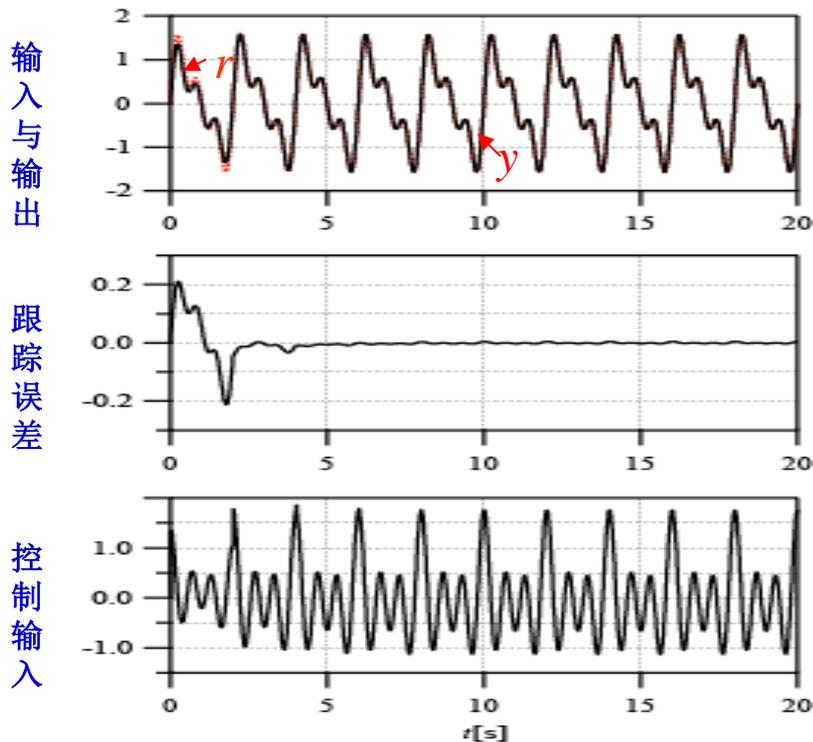
通过应用性能指标参数 $J_{10}$ 在上述区间精调，得到最优参数组为

$$\alpha = 0.60, \beta = 0.35$$

对应的反馈控制增益为

$$K_e = 136.72, \quad K_p = [-43.814 \quad -17.674]$$

## 实例4—数值仿真结果





## 实例4—结论

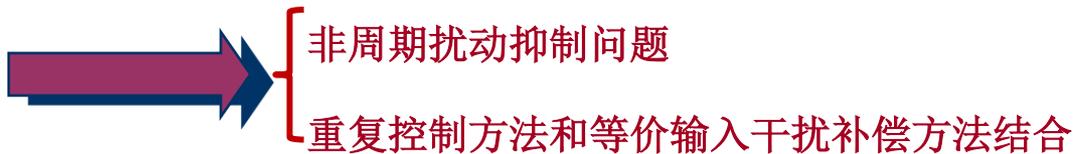
---

---

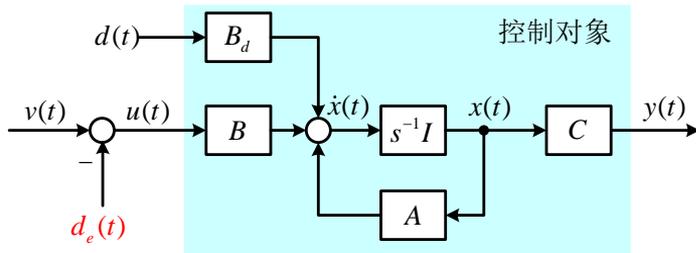
- 针对一类具有周期系数不确定性的严格真线性系统，提出了一种基于二维模型的鲁棒改进型重复控制系统设计方法，使系统具有满意的鲁棒稳定性和稳态性能
- 通过实例仿真展示了参数调节过程，定量地分析了参数对系统控制性能和学习性能的调节作用，在一定程度上解析了控制行为和学习行为之间的关联程度，并给出了总体性能评价指标，确定了可调参数的选取方法和系统设计步骤

# 基于等价输入干扰的重复控制系统

- 重复控制不仅能高精度跟踪给定周期信号，而且能有效地抑制周期扰动信号。但重复控制在周期信号的高精度控制是以对非周期信号控制的恶化为代价



- 等价输入干扰补偿思想：通过设计等价输入干扰估计器获得实际扰动  $d_e(t)$  的一个等价输入干扰  $d_e(t)$ ，然后将  $d_e(t)$  反馈施加于控制对象的控制输入端，消除扰动  $d(t)$  对控制对象输出  $y(t)$  的影响。

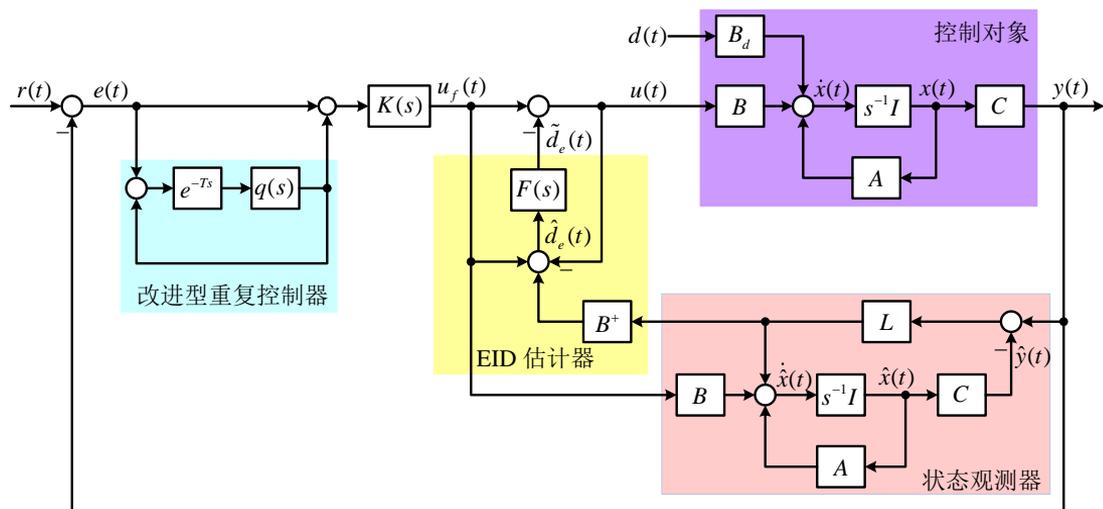


# 基于等价输入干扰的重复控制系统

等价输入干扰估计器输出，即等价输入干扰估计为： $\tilde{d}_e(t) = B^+LC[x(t) - \hat{x}(t)] + u_f(t) - u(t)$

$$B^+ := \frac{B^T}{B^T B}$$

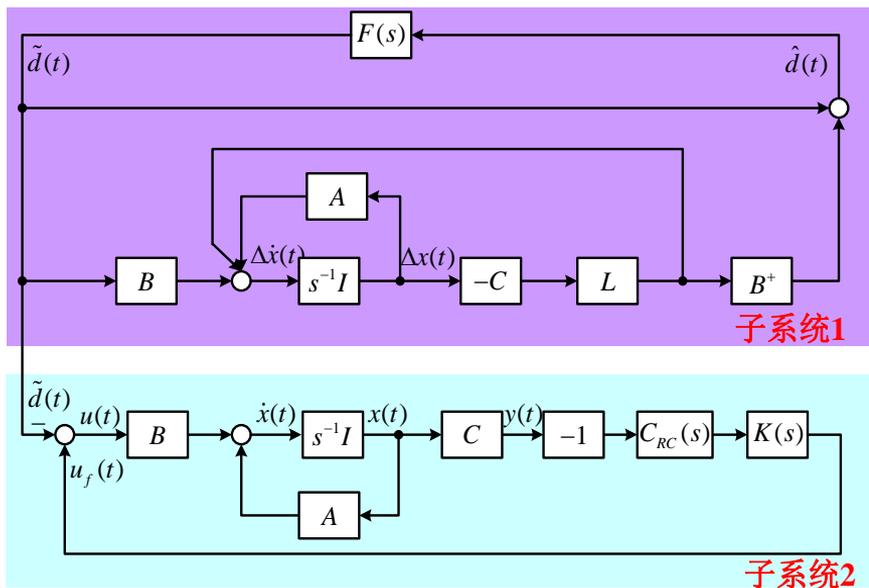
系统控制律为： $u(t) = u_f(t) - \tilde{d}_e(t)$



# 基于等价输入干扰的重复控制系统

## 重复控制系统与等价输入干扰估计器的分别设计

- 子系统2为传统重复控制系统
- 子系统1和子系统2中待定参数分别仅与等价输入干扰估计器参数和重复控制器参数有关，故二者可以分别设计
- 子系统1与子系统2之间无信号回路，故两系统可独立设计



## 仿真与实验

控制对象:  $A = \begin{bmatrix} -214.9 & -79.86 \\ 64 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $B = B_d = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0 \end{bmatrix}$ ,  $C = [0 \quad 0.2558]$

参考输入:  $r(t) = 20 \text{ rps}$

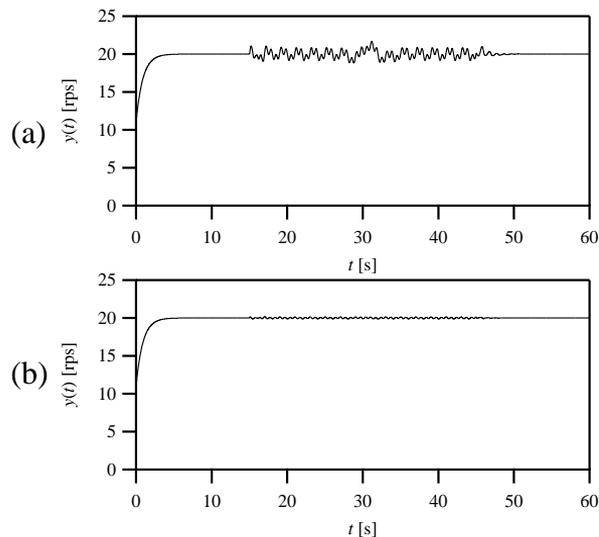
扰动信号:  $d(t) = 0.275 \sin(2\pi t) + 0.763 [\tanh(t-30) - \tanh(t-29)] + 0.153 [\sin(\pi t) + \sin(3\pi t)]$

周期扰动

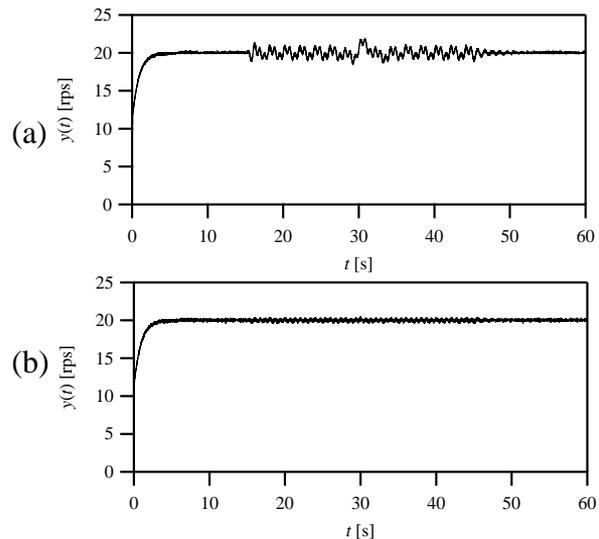
非周期扰动

控制器参数:  $\begin{cases} K(s) = 750 + \frac{1500}{s} + 7s, T = 1, q(s) = \frac{100}{s+100} \\ F(s) = \frac{200}{s+200}, L = [1853.4 \quad 1779.3]^T \end{cases}$

# 仿真与实验结果



仿真结果: (a)重复控制系统  
(b)基于EID的重复控制系统



实验结果: (a)重复控制系统  
(b)基于EID的重复控制系统

## 结论

---

---

- 引入等价输入干扰方法后，稳态跟踪误差分别由  $\pm 0.83$  rps 下降到了  $\pm 0.14$  rps（仿真结果）和由  $\pm 1$  rps 下降到了  $\pm 0.3$  rps（实验结果），说明等价输入干扰方法有效改善了系统非周期扰动抑制性能
- 基于等价输入干扰的重复控制系统中，等价输入干扰部分与原重复控制系统部分可以独立进行设计，系统设计简单

# 需要研究的课题

## 基于非线性补偿的重复控制系统设计

- 非线性估计和补偿：将控制对象的非线性等价于扰动，进而应用等价输入干扰等主动扰动抑制方法实现非线性补偿
- 补偿后重复控制系统的二维模型研究
- 基于二维模型的鲁棒非线性重复控制设计

