中国地质大学 自动化学院 吴 敏
School of Automation, China University of Geosciences

第三讲：

时滞系统鲁棒控制

时滞系统鲁棒控制

- 研究背景
- 时滞相关鲁棒控制方法
- 全新的自由权矩阵方法
- 时滞相关稳定性分析
- 改进的自由权矩阵方法

研究背景

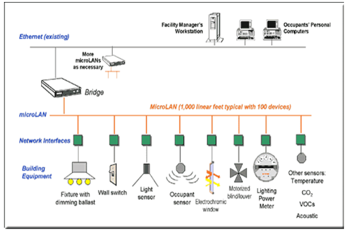
➢ 工业过程控制中的时滞问题

- ◆ 温度控制中的时延（如加热炉、炼焦生产过程、铁矿石和有色金属矿烧结过程、高炉等）
- ◆ 如何克服时滞来保证控制系统性能
- ◆ 如何利用时滞环节来提高控制系统性能

➢ 冶金工业过程

➢ 大型互联电网

➢ 网络控制系统



时滞系统控制问题

- 时滞系统建模问题：如何描述时滞系统
- 时滞无关与时滞相关

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + A_d x(t-h) \qquad (1)$$

$$\dot{x}(t) = (A + A_d)x(t) \qquad (2)$$

- 当h=0时，系统(1)就是系统(2)。
- 设系统(2)稳定，根据连续性，当h很小时系统(1)稳定，但并非对任意h>0都是稳定的。

中国地质大学 自动化学院 吴 敏
School of Automation, China University of Geosciences

确定模型变换方法(1)

➢ 牛顿—莱布尼兹公式：

$$x(t-h)=x(t)-\int_{t-h}^{t}\dot{x}(s)ds$$

$$\dot{x}(t)=Ax(t)+A_d x(t-h)$$

$$x(t-h)=x(t)-\int_{t-h}^{t}[\underline{Ax(s)+A_d x(s-h)}]ds$$

$$\dot{x}(t)=[A+A_d]x(t)-A_d\int_{t-h}^{t}[Ax(s)+A_d x(s-h)]ds$$

中国地质大学 自动化学院 吴 敏
School of Automation, China University of Geosciences

确定模型变换方法(2)

➢ 四种基本的确定模型变换

$$(\mathrm{I})\quad \dot{x}(t)=[A+A_d]x(t)-A_d\int_{t-h}^{t}[Ax(s)+A_d x(s-h)]ds$$

$$(\mathrm{II})\quad \frac{d}{dt}[x(t)+A_d\int_{t-h}^{t}x(s)]ds=(A+A_d)x(t)$$

局限性：

- 有附加特征值，与原系统不等价；
- 使用的不等式有很大的保守性：

$$2a^T b\le a^T Ra+b^T R^{-1}b, R>0$$

确定模型变换方法(3)

$$(\mathrm{III})\quad \text{Park \& Moon}: \dot{x}(t) = [A + A_d]x(t) - A_d\int_{t-h}^{t}\dot{x}(s)ds$$

$$(\mathrm{IV})\quad \text{Fridman}: \begin{cases} \dot{x}(t) = y(t) \\ y(t) = [A + A_d]x(t) - A_d\int_{t-h}^{t}\dot{x}(s)ds \end{cases}$$

特点：与原系统等价；使用了Park和Moon的不等式

$$-2a^T b \le \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} R & RM \\ M^T R & Z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}, Z = (M^T R + I)R^{-1}(RM + I)$$

$$-2a^T Nb \le \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} X & Y - N \\ Y^T - N^T & Z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} X & Y \\ Y^T & Z \end{bmatrix} \ge 0$$

确定模型变换方法(4)

局限性： 本质上都是用 $x(t)-\int_{t-h}^{t}\dot{x}(s)ds$ 替换**x(t-h)**。

例如，在**Moon (IJC, 2001)**中，对于下式 $\dot{x}(t)$ 中的**x(t-h)**前面被替换，而后面的没有替换。

$$\begin{aligned}\dot{V}(x_t) &= 2x^T(t)P\dot{x}(t)+\cdots+h\dot{x}^T(t)Z\dot{x}(t)+\cdots \\ &= 2x^T(t)P\left[Ax(t)+A_d x(t-h)\right]+\cdots+h\dot{x}^T(t)Z\dot{x}(t)+\cdots \\ &= 2x^T(t)P\left[Ax(t)+A_d x(t)-A_d\int_{t-h}^{t}\dot{x}(s)ds\right]+\cdots\end{aligned}$$

相当于: $\underline{2x^T(t)PA_d\left[x(t)-\int_{t-h}^{t}\dot{x}(s)ds-x(t-h)\right]}=0$ 加入到 $\dot{V}(x_t)$

参数化模型变换

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + A_d x(t-h)$$

$$\Downarrow$$

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + (A_d - C)x(t-h) + Cx(t-h)$$

特点：将时滞项分成两部分，一部分看成时滞无关部分，另一部分用确定的模型变换来处理。

局限性：

- C是一个待定的固定参数，对矩阵A_d的没有有效的分解方法
- 需要结合确定模型变换，仍然具有其局限性

$$2x^T(t)PC\left[x(t) - \int_{t-h}^{t} \dot{x}(s)ds - x(t-h)\right] = 0$$

中国地质大学 自动化学院 吴 敏
School of Automation, China University of Geosciences

自由权矩阵的引入

$$2x^T(t)PA_d\left[x(t)-\int_{t-h}^{t}\dot{x}(s)ds-x(t-h)\right]=0$$

$$2x^T(t)PC\left[x(t)-\int_{t-h}^{t}\dot{x}(s)ds-x(t-h)\right]=0$$

$$\Downarrow$$

$$\left[x^T(t)N_1+x^T(t-h)N_2\right]\left[x(t)-x(t-h)-\int_{t-h}^{t}\dot{x}(s)ds\right]=0$$

注：将上式加入到Lyapunov泛函的导数中，保留所有的*x*(*t*-*h*)项。由于N_1和N_2可利用LMI求解，与替换*x*(*t*-*h*)项的固定权距阵方法相比，具有更大的优越性。

时滞相关稳定性分析(1)

考虑如下时变时滞系统：

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + A_d x(t - d(t)) \qquad (3)$$

$$0 \le d(t) \le h, \quad \dot{d}(t) \le \mu \qquad (4)$$

构造Lyapunov泛函：

$$V(x_t) = x^T Px + \int_{t-d(t)}^{t} x^T(s)Qx(s)ds + \int_{-h}^{0}\int_{t+\theta}^{t} \dot{x}^T(s)Z\dot{x}(s)dsd\theta$$

计算其导数，并对于 $\dot{x}(t)$ 这一项，有两种处理方式：

- 利用系统方程替换 $\dot{x}(t)$
- 保留 $\dot{x}(t)$，并利用自由权矩阵表示方程各项的关系。

中国地质大学 自动化学院 吴 敏
School of Automation, China University of Geosciences

时滞相关稳定性分析(2)

替换 $\dot{x}(t)$ 的情况

计算Lyapunov泛函的导数，利用系统方程(3)替换$\dot{x}(t)$，并将下式加入Lyapunov泛函的导数中：

$$\left[x^T(t)N_1 + x^T(t-d(t))N_2\right]\left[x(t) - x(t-d(t)) - \int_{t-d(t)}^{t} \dot{x}(s)ds\right] = 0$$

得到的结果(*Automatica*, 2004, 40 (8): 1435-1439):

- 理论上包含Moon(IJC, 2001)的结果；
- 理论上包含时滞无关稳定条件；
- 好于Fridman(IEEETAC,2002; IJC 2003)的结果。

时滞相关稳定性分析(3)

保留 $\dot{x}(t)$ 的情况

计算Lyapunov泛函的导数，保留 $\dot{x}(t)$ ，利用自由权矩阵表示系统方程(3)的关系，将下式加入Lyapunov泛函的导数中：

$$\left[x^T(t)T_1+\dot{x}^T(t)T_2\right]\left[\dot{x}(t)-Ax(t)-A_d x(t-d(t))\right]=0$$

$$\left[x^T(t)N_1+\dot{x}^T(t)N_2+x^T(t-d(t))N_3\right]\left[x(t)-x(t-d(t))-\int_{t-d(t)}^{t}\dot{x}(s)ds\right]=0$$

得到的结果(*IEEE-TAC*, 2004, 49 (5): 828-832):

- **理论上包含Fridman(IEEETAC,2002)的结果；**
- **与替换 $\dot{x}(t)$ 的结果是等价的；**
- **方便处理参数依赖Lyapunov泛函。**

参数依赖Lyapunov泛函(1)

考虑系统矩阵具有凸多项式不确定性：

$$[A \quad A_d] \in \Omega = \left\{ [A(\xi) \quad A_d(\xi)] = \sum_{j=1}^{p} \xi_j [A_j \quad A_{dj}], \sum_{j=1}^{p} \xi_j = 1, \xi_j \geq 0 \right\}$$

Lyapunov泛函：

$$V(x_t) = x^T P x + \int_{t-h}^{t} x^T(s) Q x(s) ds + \int_{-h}^{0} \int_{t+\theta}^{t} \dot{x}^T(s) Z \dot{x}(s) ds d\theta$$

$$\Downarrow$$

$$V_u(x_t) = x^T P(\xi) x + \int_{t-h}^{t} x^T(s) Q(\xi) x(s) ds + \int_{-h}^{0} \int_{t+\theta}^{t} \dot{x}^T(s) Z(\xi) \dot{x}(s) ds d\theta$$

$$P(\xi) = \sum_{j=1}^{p} \xi_j P_j, Q(\xi) = \sum_{j=1}^{p} \xi_j Q_j, Z(\xi) = \sum_{j=1}^{p} \xi_j Z_j,$$

参数依赖Lyapunov泛函(2)

用下述式子加入到Lyapunov泛函的导数中，而保留其中所有的 $\dot{x}(t)$ 项。

$$\left[x^T(t)T_1+\dot{x}^T(t)T_2\right]\times\left[\dot{x}(t)-Ax(t)-A_d x(t-d(t))\right]=0$$

这样，不会出现*P, Q, Z*与*A*, A_d的乘积， Lyapunov泛函的导数可以直接表示为:

$$\dot{V}(x_t)\leq\sum_{j=1}^{p}\eta^T(t)\xi_j\overline{\Xi}_j\eta(t)-\sum_{j=1}^{p}\int_{t-d(t)}^{t}\zeta^T(t,s)\xi_j\overline{\Psi}^{(j)}\zeta(t,s)ds$$

改进的自由权矩阵方法(1)

仍然考虑系统(3)在时滞约束(4)下的稳定性，构造相同Lyapunov泛函：

$$V(x_t)=x^T Px+\int_{t-d(t)}^{t} x^T(s)Qx(s)ds+\int_{-h}^{0}\int_{t+\theta}^{t}\dot{x}^T(s)Z\dot{x}(s)dsd\theta$$

其最后一项的导数为：

$$h\dot{x}^T(t)Z\dot{x}(t)-\int_{t-h}^{t}\dot{x}^T(s)Z\dot{x}(s)ds$$

$$=h\dot{x}^T(t)Z\dot{x}(t)-\int_{t-d(t)}^{t}\dot{x}^T(s)Z\dot{x}(s)ds-\underline{\underline{\int_{t-h}^{t-d(t)}\dot{x}^T(s)Z\dot{x}(s)ds}}$$

而以前的做法是将其放大为：

$$h\dot{x}^T(t)Z\dot{x}(t)-\int_{t-d(t)}^{t}\dot{x}^T(s)Z\dot{x}(s)ds$$

改进的自由权矩阵方法(2)

针对存在的局限性，构造如下的Lyapunov泛函：

$$V(x_t) = x^T P x + \int_{t-d(t)}^{t} x^T(s) Q x(s) ds + \int_{t-h}^{t} x^T(s) R x(s) ds$$

$$+ \int_{-h}^{0} \int_{t+\theta}^{t} \dot{x}^T(s)(Z_1 + Z_2)\dot{x}(s) ds d\theta$$

在求导数时将被忽略的一项保留下来，利用自由权矩阵表示下述关系，可以得到一个新的稳定性结论，进一步克服已有结果的保守性。(*IEEE-TAC*, 2007, 52(2): 293-299)

$$\left[x^T(t)N_1 + x^T(t-d(t))N_2\right]\left[x(t) - x(t-d(t)) - \int_{t-d(t)}^{t} \dot{x}(s) ds\right] = 0$$

$$\left[x^T(t)S_1 + x^T(t-d(t))S_2\right]\left[x(t-d(t)) - x(t-h) - \int_{t-h}^{t-d(t)} \dot{x}(s) ds\right] = 0$$

$$\left[x^T(t)M_1 + x^T(t-d(t))M_2\right]\left[x(t) - x(t-h) - \int_{t-h}^{t} \dot{x}(s) ds\right] = 0$$

自由权矩阵方法的应用

- 时滞系统H_∞控制/滤波
- 中立型系统鲁棒稳定性分析与鲁棒控制
- 时滞神经网络的稳定性分析、辨识与估计
- 网络控制系统分析与设计
- 切换时滞系统鲁棒控制
- 基于T－S模型的时滞系统控制
- 随机时滞系统、混沌同步、离散时滞系统的分析与控制

网络系统控制

- 工业网络系统控制的特点
- 网络系统控制问题
  - ✓ 针对远程分布式控制和网络系统，研究基于自由权矩阵的网络系统控制方法、基于网络时滞估计和补偿的网络系统控制方法
- 工业网络系统控制解决方案